

**Carmen Angelescu, Nicolae Baci, Ovidiu Bădescu,
Nicolai Buzduga, Constantin Chirilă,
Marinela-Cristina Cimpoeșu, Daniela Chiteș,
Gabriela Constantinescu, Dorel Cosic, Mihai Ionescu,
Viorel Lupșor, Laura Marin, Ioan Marinescu,
Sever Moldoveanu, Daniel Năstruț, Ismet Omer, Ana Poștaru,
Nicolae Stănică, Gheorghe Stoianovici, Nicolae Suci,
Dorina Trifon, George Vlad, Cătălin Zîrnă**

GHID DE PREGĂTIRE BACALAUREAT MATEMATICĂ - M1

➤ Profil: real, militar

Specializare : matematică-informatică



CUPRINS

<i>Calendarul examenului de Bacalaureat 2009</i>	3
<i>Programa pentru examenul de Bacalaureat 2009 – Matematică, tipul M1</i>	4
<i>Metodologia de organizare a examenului de Bacalaureat 2009</i>	5

SUBIECTUL I	SUBIECTUL II	SUBIECTUL III
Varianta 1 7	 113	 267
Varianta 2 8	 115	 269
Varianta 3 9	 117	 271
Varianta 4 10	 118	 272
Varianta 5 11	 119	 274
Varianta 6 12	 121	 275
Varianta 7 13	 122	 276
Varianta 8 14	 124	 278
Varianta 9 15	 126	 280
Varianta 10 16	 127	 281
Varianta 11 17	 128	 282
Varianta 12 18	 130	 284
Varianta 13 19	 132	 285
Varianta 14 20	 133	 286
Varianta 15 21	 135	 287
Varianta 16 22	 137	 288
Varianta 17 23	 138	 289
Varianta 18 24	 139	 290
Varianta 19 25	 140	 292
Varianta 20 26	 142	 293
Varianta 21 27	 144	 294
Varianta 22 28	 146	 295
Varianta 23 29	 148	 297
Varianta 24 30	 149	 298
Varianta 25 31	 151	 299
Varianta 26 32	 153	 301
Varianta 27 33	 155	 302
Varianta 28 34	 156	 303
Varianta 29 35	 157	 304
Varianta 30 36	 159	 306
Varianta 31 37	 161	 307

Varianta 32	38	 163	 309
Varianta 33	40	 164	 311
Varianta 34	41	 166	 313
Varianta 35	42	 168	 315
Varianta 36	43	 169	 317
Varianta 37	44	 170	 318
Varianta 38	45	 172	 319
Varianta 39	46	 174	 320
Varianta 40	47	 175	 321
Varianta 41	48	 177	 322
Varianta 42	49	 178	 324
Varianta 43	50	 179	 326
Varianta 44	51	 181	 328
Varianta 45	52	 183	 329
Varianta 46	53	 185	 331
Varianta 47	55	 186	 333
Varianta 48	56	 187	 334
Varianta 49	57	 189	 335
Varianta 50	58	 191	 337
Varianta 51	59	 193	 339
Varianta 52	60	 195	 340
Varianta 53	61	 196	 342
Varianta 54	62	 197	 343
Varianta 55	63	 198	 344
Varianta 56	64	 199	 345
Varianta 57	65	 200	 346
Varianta 58	66	 201	 348
Varianta 59	67	 203	 350
Varianta 60	69	 205	 351
Varianta 61	70	 206	 353
Varianta 62	71	 208	 355
Varianta 63	72	 209	 357
Varianta 64	74	 210	 359
Varianta 65	75	 211	 360
Varianta 66	76	 212	 361
Varianta 67	77	 213	 363
Varianta 68	78	 215	 365
Varianta 69	79	 216	 366

Varianta 70	80		217		368
Varianta 71	81		219		370
Varianta 72	82		221		371
Varianta 73	83		223		372
Varianta 74	84		225		374
Varianta 75	85		226		376
Varianta 76	86		228		378
Varianta 77	87		230		379
Varianta 78	88		232		380
Varianta 79	89		234		382
Varianta 80	90		236		384
Varianta 81	91		237		385
Varianta 82	92		238		386
Varianta 83	93		239		387
Varianta 84	94		241		388
Varianta 85	95		243		390
Varianta 86	96		244		391
Varianta 87	97		245		393
Varianta 88	98		246		394
Varianta 89	99		247		395
Varianta 90	100		249		396
Varianta 91	101		250		397
Varianta 92	102		251		398
Varianta 93	103		252		400
Varianta 94	104		254		401
Varianta 95	105		255		403
Varianta 96	106		257		405
Varianta 97	107		259		407
Varianta 98	108		260		408
Varianta 99	109		261		409
Varianta 100	110		263		410

Tabel de evidență a subiectelor rezolvate	411
---	-----

VARIANTA 1

- 5p** 1. Să se determine numărul natural x din egalitatea $1 + 5 + 9 + \dots + x = 231$.
- 5p** 2. Să se rezolve inecuația în mulțimea numerelor reale $2x^2 - 5x + 3 \leq 0$.
- 5p** 3. Să se determine inversa funcției bijective $f: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$, $f(x) = x^2 + 1$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A , care conțin elementul 1.
- 5p** 5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât distanța dintre punctele $A(2, m)$ și $B(m, -2)$ să fie 4.
- 5p** 6. Să se calculeze $\cos \frac{23\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12}$.

Soluții

1. $1 + 5 + 9 + \dots + x = 231$. Se observă că termenii sunt în progresie aritmetică cu $a_1 = 1$ și $r = 4$. Atunci $x = 1 + 4(k-1)$, unde k reprezintă numărul de termeni. Rezultă $1 + 5 + 9 + \dots + (4k-3) = 231$; $\frac{k(4k-2)}{2} = 231$; $2k^2 - k - 231 = 0$. Cum $k \in \mathbb{N}^*$ rezultă $k = 11$, de unde $x = 41$.

2. Inecuația $2x^2 - 5x + 3 \leq 0$, se mai scrie $(2x-3)(x-1) \leq 0$.

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x^2 - 5x + 3$		$+$	0	$-$

Rezultă $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$.

3. $f: (0, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$; $f(x) = x^2 + 1$; cum f este bijectivă, atunci este și inversabilă.

Avem $f(x) = y$, unde $x \in (0, +\infty)$ și $y \in (1, +\infty)$. Atunci $x^2 + 1 = y$, de unde

$x^2 + 1 - y = 0$. Rezultă că $\forall y \in (1, +\infty), \exists x = \pm\sqrt{y-1}$. Dar $x \in (0, +\infty)$, atunci

$x = \sqrt{y-1}$. Deci $f^{-1}: (1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$.

4. Submulțimile de trei elemente din A care conțin 1 sunt de forma $\{a, b, 1\}$, $a, b \in A \setminus \{1\}$ deci avem $C_9^2 = 36$ submulțimi.

5. $AB = \sqrt{(2-m)^2 + (m+2)^2}$. Rezultă $8 + 2m^2 = 16$, adică $m^2 = 4$, de unde $m \in \{\pm 2\}$.

6. $\cos \frac{23\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12} = \cos \left(2\pi - \frac{23\pi}{12}\right) \cdot \sin \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$.

VARIANTA 2

- 5p 1. Să se arate că $(1-i)^{24}$ este real.
- 5p 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{3x-1}{x+1} + \frac{x+1}{2x-1} = 3$.
- 5p 3. Să se determine inversa funcției bijective $f: \mathbb{R} \rightarrow (1, \infty)$, $f(x) = e^x + 1$.
- 5p 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor de două cifre, să avem $a \neq b$.
- 5p 5. Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC , unde $A(-2, -1), B(2, 0), C(0, 6)$.
- 5p 6. Fie vectorii $\vec{u} = m\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = (m-2)\vec{i} - \vec{j}$. Să se determine $m > 0$ astfel încât vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ să fie perpendiculari.

Soluții

1. $(1-i)^2 = 1-2i-1 = -2i$; $(1-i)^{24} = [(1-i)^2]^{12} = (-2i)^{12} = 2^{12}$.
2. Din $\frac{3x-1}{x+1} = 3 - \frac{x+1}{2x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$, obținem ecuația $x^2 - 6x + 5 = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$, având soluțiile $x \in \{1, 5\}$.
3. $f: \mathbb{R} \rightarrow (1, \infty)$, $f(x) = e^x + 1$; cum f este bijectivă, avem $f^{-1}: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \ln(x-1)$.
4. Numere de două cifre sunt în total 90 (de la 10 la 99). Numerele pentru care $a = b$ sunt 9 (și anume: 11, 22, 33, ..., 99), deci sunt 81 numere cu $a \neq b$. Atunci $P = \frac{81}{90} = \frac{9}{10}$.
5. Fie M mijlocul lui (BC) . Atunci $x_M = \frac{2+0}{2} = 1$ și $y_M = \frac{0+6}{2} = 3$, adică $M(1, 3)$. Rezultă $d(A, M) = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-3)^2} = 5$.
6. Dacă $\vec{u} \perp \vec{v}$, atunci $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Rezultă $m(m-2) - 3 = 0$. Cum $m > 0$, atunci $m = 3$.

VARIANTA 3

- 5p 1. Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}$.
- 5p 2. Să se determine valoarea minimă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^2 - 8x + 1$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x-1) + \lg(6x-5) = 2$.
- 5p 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.
- 5p 5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(6, 4)$ și este perpendiculară pe dreapta $d: 2x - 3y + 1 = 0$.
- 5p 6. Știind că $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\cos 2\alpha$.

Soluții

1. Numerele mai pot fi scrise $\sqrt{2} = \sqrt[12]{64}; \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{256}; \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{125}$. Rezultă $\sqrt{2} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{4}$.
2. $\min f(x) = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-48}{16} = -3$.
3. Avem condițiile: $x - 1 > 0$, și $6x - 5 > 0$, de unde $x \in (1, +\infty)$. Ecuația devine $\lg[(x-1)(6x-5)] = \lg 100$, adică $(x-1)(6x-5) = 100$; $6x^2 - 11x - 95 = 0$, de unde $x_1 = 5, x_2 = -\frac{19}{6}$. Cum $x > 1$ rezultă $x = 5$.
4. Avem 90 de numere de câte două cifre și 6 pătrate perfecte ($4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2$). Atunci $P = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$.
5. Panta dreptei d este $m_d = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$. Fie $B \in d$ astfel încât $AB \perp d$. Atunci $m_{AB} \cdot m_d = -1$, de unde $m_{AB} = -\frac{3}{2}$. Ecuația dreptei AB va fi $AB: y - 4 = -\frac{3}{2}(x - 6)$; $AB: 3x + 2y - 26 = 0$.
6. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$.

VARIANTA 6

- 5p 1. Să se calculeze suma tuturor numerelor naturale de două cifre care se divid cu 11.
- 5p 2. Să se determine funcția f de gradul al doilea știind că
 $f(-1)=1, f(0)=1, f(1)=3$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea $(0, \pi)$ ecuația $\sin 3x = \sin x$.
- 5p 4. Câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{2, 4, 6, 8\}$?
- 5p 5. Se consideră triunghiul ABC cu vârfurile în $A(1,2), B(2,-2)$ și $C(4,6)$. Să se calculeze $\cos B$.
- 5p 6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC știind că $C = \frac{\pi}{6}$ și $AB = 6$.

Soluții

1. Fie $A = \{x \mid x \in M_{11}, x \in [10, 99]\}$.

Atunci $A = \{11 \cdot 1, 11 \cdot 2, \dots, 11 \cdot 9\} = \{11, 22, \dots, 99\}$, rezultă

$$S = 11(1 + 2 + \dots + 9) = 11 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 495.$$

2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Avem $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3, \\ a-b+c=1 \end{cases}$

de unde $a=b=c=1$ adică $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$.

3. $\sin 3x - \sin x = 0$, $2 \sin x \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ sau $\cos 2x = 0$. Cum $x \in (0, \pi)$,

$$\text{rezultă } x = \frac{\pi}{4} \text{ sau } x = \frac{3\pi}{4}.$$

$$4. A_4^3 = 24.$$

5. Avem $AB = \sqrt{17} = c$, $AC = 5 = b$, $BC = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} = a$. Din teorema cosinusului rezultă $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{15}{17}$.

6. Dacă $C = \frac{\pi}{6}$, atunci $m(\widehat{AOB}) = \frac{\pi}{3}$, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului. Rezultă că $\triangle AOB$ este echilateral, de unde $R = AB = 6$.

Sau: din teorema sinusurilor: $2R = \frac{AB}{\sin C} = 6 \cdot 2$, de unde $R = 6$.

VARIANTA 7

- 5p 1. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{8+i}{7-4i}$.
- 5p 2. Să se determine valoarea maximă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea $[0, 2\pi)$ ecuația $\sin x = -\frac{1}{2}$.
- 5p 4. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$ are exact 120 de submulțimi cu două elemente.
- 5p 5. Se știe că în triunghiul ABC vectorii $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ au același modul. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic.
- 5p 6. Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC care are lungimile laturilor egale cu 3, 4 și 5.

Soluții

1. $\left| \frac{8+i}{7-4i} \right| = \left| \frac{4+3i}{5} \right| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 1$.
2. $f_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = 0$.
3. Dacă $\sin x = -\frac{1}{2}$, atunci $x \in \left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$.
4. Avem $C_n^2 = 120$. Rezultă $\frac{n(n-1)}{2} = 120$; $n^2 - n - 240 = 0$, având soluțiile -15 și 16. Cum $n \geq 2$, rămâne doar $n = 16$.
5. Avem $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$, unde M este mijlocul laturii BC .
 $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Atunci $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2 \cdot AM$, de unde $AM = \frac{BC}{2}$. Rezultă că $\triangle ABC$ este dreptunghic, $m(\hat{A}) = 90^\circ$.
6. Avem $p = \frac{3+4+5}{2} = 6$. Cum $5^2 = 3^2 + 4^2$, rezultă că $\triangle ABC$ este dreptunghic, de unde $S = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$. Atunci $r = \frac{S}{p} = \frac{6}{6} = 1$.

VARIANTA 8

- 5p 1. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2 = -4$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + x + c$. Știind că punctele $A(1,2)$ și $B(0,3)$ aparțin graficului funcției f , să se determine numerele reale a și c .
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{7x+1} - x = 1$.
- 5p 4. Câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma cu cifre din mulțimea $\{1,3,5,7,9\}$?
- 5p 5. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele E și F astfel încât $\overline{AE} = \overline{EB}$, $\overline{DF} = 2\overline{FE}$. Să se demonstreze că punctele A , F și C sunt coliniare.
- 5p 6. Fie triunghiul ABC . Să se calculeze lungimea înălțimii corespunzătoare laturii BC știind că $AB=13$, $AC=14$ și $BC=15$.

Soluții

1. Avem $z^2 + 4 = 0$. Rezultă $(z+2i)(z-2i) = 0$, de unde $z_1 = 2i$; $z_2 = -2i$.
2. Dacă $A, B \in G_f$, atunci $f(0) = 3$ și $f(1) = 2$, adică $\begin{cases} c = 3 \\ a+1+c = 2 \end{cases}$, de unde $\begin{cases} c = 3 \\ a = -2 \end{cases}$.
3. Ecuația se mai scrie $\sqrt[3]{7x+1} = 1+x$, iar prin ridicare la cub, se obține $x^3 + 3 \cdot x^2 - 4x = 0$ având soluțiile $x \in \{-4, 0, 1\}$.
4. $A_5^4 = 120$.
5. $\frac{DE}{FE} = 3$. Atunci $\overline{FE} = \frac{\overline{DE}}{3}$; $\overline{FA} + \overline{AE} = \frac{\overline{DA} + \overline{AE}}{3}$; $\overline{FA} = \frac{\overline{DA} + \overline{AE} - 3\overline{AE}}{3}$;
 $\overline{FA} = \frac{\overline{DA} + 2\overline{EA}}{3}$; $\overline{AF} = \frac{\overline{AD} + 2 \cdot \overline{AE}}{3} = \frac{1}{3}(\overline{AD} + \overline{AB}) = \frac{1}{3} \cdot \overline{AC}$. Rezultă că A , F , C coliniare.
6. Avem $p = \frac{a+b+c}{2} = 21$. Atunci $S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} = 84$. Avem
 $S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} = 84$, de unde $h_a = \frac{2 \cdot 84}{15} = \frac{56}{5}$.

VARIANTA 9

- 5p 1. Să se determine numărul natural x pentru care $1 + 3 + 5 + \dots + x = 225$.
- 5p 2. Să se determine valorile parametrului real m știind că graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx - 2m$ intersectează axa Ox în două puncte situate la distanța 3.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2^{-x+1} + 1) = x$.
- 5p 4. Să se arate că $C_{17}^3 > C_{17}^{15}$.
- 5p 5. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ de latură 4. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.
- 5p 6. Să se arate că $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ = \frac{91}{2}$.

Soluții

1. $x = 2n - 1$, unde n este numărul de termeni ai șirului.

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = \frac{n(1 + 2n - 1)}{2} = n^2 \text{ de unde se obține } n^2 = 225, \text{ adică } n = 15.$$

Deci $x = 2n - 1 = 29$.

2. Condiția ca ecuația $x^2 + mx - 2m = 0$ să aibă 2 soluții reale este $\Delta = m^2 + 8m > 0$.

Din $|x_1 - x_2| = 3$ obținem $(x_1 - x_2)^2 = 9$, de unde $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 9$, adică

$$m^2 + 8m - 9 = 0 \text{ cu soluțiile } m_1 = -9 \text{ și } m_2 = 1, \text{ care verifică } \Delta > 0.$$

3. Din $\log_2(2^{-x+1} + 1) = x$ rezultă $2^{-x+1} + 1 = 2^x$, adică $(2^{-x}) \cdot 2 + 1 = 2^x$. Notăm

$$2^x = y > 0 \text{ și obținem } \frac{2}{y} + 1 = y, \text{ de unde } y^2 - y - 2 = 0; \Delta = 9 \text{ cu soluțiile } y_1 = 2$$

sau $y_2 = -1 < 0$, de unde se obține $x = 1$.

$$4. C_{17}^{15} = C_{17}^2; C_{17}^3 = \frac{17!}{3! \cdot 14!} = \frac{17!}{2! \cdot 15!} \cdot \frac{15}{3} = C_{17}^2 \cdot 5, \text{ deci } C_{17}^3 = C_{17}^2 \cdot 5 > C_{17}^2 = C_{17}^{15}.$$

5. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$. Dar $|\overrightarrow{AD}| = 2|\overrightarrow{BC}|$ și $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$, deci $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}$, adică $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BC}$ și prin urmare $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = 3|\overrightarrow{BC}| = 12$.

6. Se folosește formula $\sin x = \cos(90^\circ - x)$.

$$\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ = (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) + \cos^2 45^\circ + 1 = 44 + \frac{2}{4} + 1 = \frac{182}{4} = \frac{91}{2}.$$